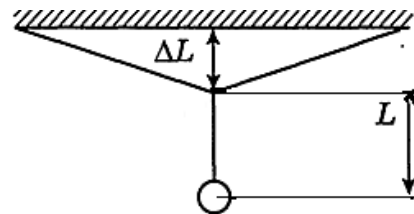


Э-11.2. Изменяющаяся траектория. Оборудование. Два канцелярских зажима (клипсы) 51 мм; гайка М10; нить длиной 2,5 – 3 м; секундомер; линейка длиной 50 см, лист бумаги А4, два листа миллиметровой бумаги А4 для построения графиков.

Закрепите зажимы на краю стола на расстоянии 40–45 см друг от друга. Привяжите концы нити к проволочным «лапкам» зажимов так, чтобы прогиб ΔL составлял 2 – 3 см. К середине этой нити привяжите другую нить длиной около 60 см с гайкой. У вас должна получиться система из нитей и гайки, представленная на рис.1. Изменяя расстояние между зажимами, вы можете регулировать величину «прогиба» ΔL .



Обозначим вертикальную плоскость, в которой находятся нити и гайка в положении равновесия (плоскость рисунка), символом P .

Задание. На листе бумаги проведите прямую линию. Положите лист на пол так, чтобы нарисованная прямая находилась строго под краем стола и была ему параллельна.

1) Измерьте период T_1 колебаний математического маятника, совершаемых в плоскости P , параллельной краю стола. Маятник должен перемещаться над нарисованной прямой.

2) Измерьте период T_2 колебаний математического маятника, совершаемых в вертикальной плоскости, перпендикулярной краю стола. Чтобы контролировать движение маятника, расположите на полу лист так, чтобы нарисованная прямая была перпендикулярна краю стола.

3) Положите лист на полу так, чтобы нарисованная прямая составляла угол приблизительно 45° с плоскостью P . Отклоните гайку вдоль нарисованной прямой не несколько см в вертикальной плоскости S , и отпустите её. Гайка начнёт совершать движение по медленно изменяющейся траектории. Проекция траектории на горизонтальную плоскость сначала близка к прямой, затем постепенно превращается в эллиптическую, круговую и т.д. Вы можете заметить, что движение гайки является циклическим, то есть через некоторое время τ движение гайки вернется в исходную плоскость S , и её траектории будет близка к первоначальной прямой. Измерьте период τ .

4) Исследуйте экспериментально зависимость $\tau(\Delta L)$, изменяя ΔL в диапазоне 2 – 7 см (не менее 5 точек) при постоянном значении L (50 см). Результаты измерений запишите в таблицу.

5) Исследуйте экспериментально зависимость $\tau(L)$, изменяя L в диапазоне 25 – 60 см (не менее 5 точек) при постоянном значении ΔL (2,5 – 4 см). Результаты измерений запишите в таблицу.

6) При $\frac{\Delta L}{L} \ll 1$ зависимость $\tau(\Delta L, L)$ может быть описана формулой $\tau = A \cdot L^\alpha \cdot \Delta L^\beta$.

Используя графическую обработку экспериментальных результатов, определите значения α и β .

7) Предложите теоретическое обоснование зависимости $\tau = A \cdot L^\alpha \cdot \Delta L^\beta$, получите теоретическое значение параметров этой зависимости (A , α и β). Сравните теоретические результаты для α и β с экспериментальными.

Примечание. При работе над п. 4 вы можете использовать приближение

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx, \text{ справедливое при } x \ll 1.$$

Внимание! Из-за ограниченного времени выполнения задания погрешности определения α и β оценивать не требуется, однако точность полученных вами промежуточных и конечных результатов будет учитываться при выставлении баллов!

Э-11.2. Возможное решение. Экспериментальные результаты и их обработка.

- 1) За время $t_1 = 45,9$ с маятник совершил $n_1 = 30$ колебаний. Тогда, $T_1 = t_1/n_1 = 1,530$ с.
- 2) За время $t_2 = 63,4$ с маятник совершил $n_2 = 40$ колебаний. Тогда, $T_2 = t_2/n_2 = 1,585$ с.
- 3) Полный поворот плоскости колебаний маятника произошёл за время $\tau = 63,0$ с.

Примечание. По теоретическим выкладкам должно выполняться равенство: $\tau = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}$.

Расхождение времени τ , подсчитанного по этой формуле, и непосредственно измеренного, указывает на то, что точность измерения периодов T_1 и T_2 должна быть больше.

- 4) Результаты измерений зависимости $\tau(\Delta L)$ при $L = 60$ см представлены в табл. 1.

ΔL , см	τ , с	$\ln \Delta L$	$\ln \tau$
2,6	69	0,96	4,23
1,6	107	0,47	4,67
3,2	58	1,16	4,06
4,5	42	1,50	3,74
6,4	29	1,86	3,37
7,1	26	1,96	3,26
4,4	42	1,48	3,74
5,1	38	1,63	3,64
2,9	63	1,06	4,14
3,7	49	1,31	3,89

- 5) Результаты измерений зависимости $\tau(L)$ при $\Delta L = 2,6$ см представлены в табл. 2.

L , см	τ , с	$\ln L$	$\ln \tau$
60	68	4,09	4,22
53,5	58	3,98	4,06
46	42	3,83	3,74
37,5	31	3,62	3,43
30	24	3,40	3,18
23	15	3,14	2,71

- 6) Используя график $\ln \tau$ от $(\ln \Delta L)$ (рис. 2), определим показатель $\beta \approx -0,94$, а из углового коэффициента графика $\ln \tau$ ($\ln L$) (рис. 3) находим показатель $\alpha \approx 1,57$.

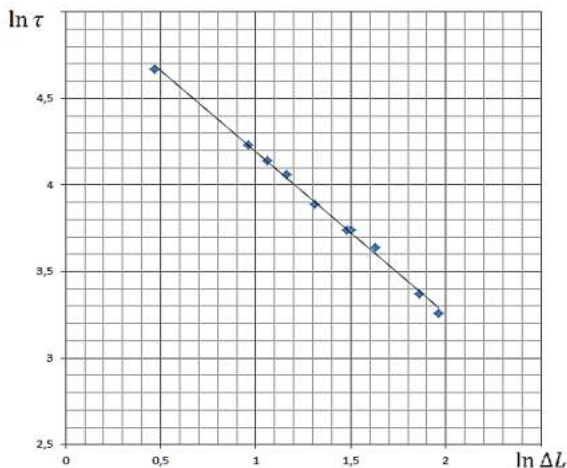


Рис. 2.

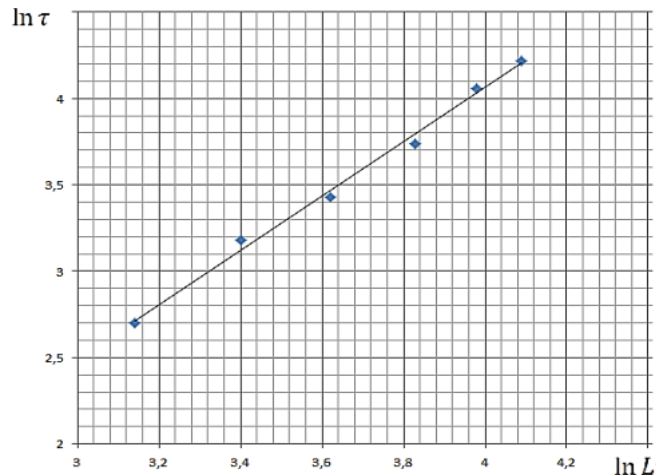


Рис. 3.

7) **Теоретическое описание.** Движение груза (гайки) является суперпозицией колебаний во взаимно перпендикулярных вертикальных плоскостях: плоскости P (в ней расположены нити с грузом) и плоскость R (она перпендикулярна краю стола и плоскости P). В плоскости P период колебаний $T_P = 2\pi\sqrt{L/g}$. В плоскости R период равен $T_R = 2\pi\sqrt{(L + \Delta L)/g}$. В начале колебаний траектория груза близка к прямолинейной. Фаза колебаний равна 0. С течением времени колебания в плоскости R отстают по фазе от колебаний в плоскости P . При этом траектория становится эллиптической, затем близка к круговой (в этот момент отставание по фазе равно $\pi/2$), и снова становится прямолинейной (отставание по фазе равно π). К моменту завершения цикла разность фаз равна 2π , то есть числа полных колебаний в перпендикулярных плоскостях отличаются на 1 (n полных колебаний в плоскости R и $(n + 1)$ – число полных колебаний в плоскости P):

$$\tau = 2\pi(n + 1)\sqrt{L/g}, \quad \tau = 2\pi n\sqrt{(L + \Delta L)/g}.$$

Отсюда:

$$\sqrt{\frac{L + \Delta L}{L}} = \frac{n + 1}{n}.$$

Учитывая, что $\frac{\Delta L}{L} \ll 1$, получаем:

$$\sqrt{\frac{L + \Delta L}{L}} \approx 1 + \frac{\Delta L}{2L} = 1 + \frac{1}{n}.$$

Тогда число полных колебаний в плоскости S до завершения цикла

$$n \approx \frac{2L}{\Delta L},$$

а для времени τ получаем:

$$\tau = 2\pi n \sqrt{\frac{L + \Delta L}{g}} \approx \frac{4\pi}{\sqrt{g}} L^{1,5} \Delta L^{-1}.$$

Полученные экспериментально значения α и β хорошо согласуются с теоретическими.

№	Э-11.2. Критерии оценивания (20 баллов)	Баллы
1	Измерен период T_1	1
2	Измерен период T_2	1
3	Измерен период τ	1
4	Исследована зависимость $\tau(\Delta L)$. Приведена таблица значений. За каждую точку зависимости ставьте 0,5 балла (если точек более 5, баллы не добавляются)	2,5
5	Исследована зависимость $\tau(L)$. Приведена таблица значений. За каждую точку зависимости ставьте 0,5 балла (если точек более 5, баллы не добавляются)	2,5
6	Построен график зависимости $\ln \tau (\ln \Delta L)$	1
7	На основании анализа графика п. 3 получено значение β в интервале $(-0,8 \div -1,1)$ – 2 балла, а в интервале $(-0,7 \div -1,2)$ – 1 балл	2
8	Построен график зависимости $\ln \tau (\ln L)$	1
9	На основании анализа графика п.5 получено значение α в интервале $(1,35 \div 1,65)$ – 2 балла, в интервале $(1,2 \div 1,8)$ – 1 балл	2
10	Отмечено, что движение представляет собой суперпозицию перпендикулярных колебаний с разными периодами	1
11	Отмечено, что для возвращения к исходному состоянию груз должен совершить в одном направлении на одно колебание больше	1
12	Установлена связь между числом колебаний по одному из направлений со значением $\frac{\Delta L}{L}$	2
13	При использовании п. 7, 8, 9 или из других аналогичных рассуждений получены верные значения α и β (по одному баллу за показатель)	2

Примечание. В пунктах 11 и 12 возможен альтернативный подход, основанный на рассмотрении сдвига взаимно перпендикулярных колебаний по фазе на 2π . При правильном использовании такого подхода за указанные пункты ставьте полный балл.